Marc Saint-Paul
15-18 octobre 2012 (1ère version) et 22 octobre (1ère révision).
Pour le séminaire "Récursivité et imprédicativité" du 19 octobre 2012

Notes de lecture de l'article "Non-wellfounded Set Theory" de Lawrence Moss

en contribution à la théorie de la récursivité de René Lew

L'article de Moss (Moss, 2008) qui paraît en ligne dans la *Standford Encyclopedia of Philosophy* se présente comme un exposé récent synthétique et relativement accessible d'introduction à la théorie des ensembles non bien-fondés d'une part, à la théorie des catégories coalgébriques d'autre part. Il constitue, à ma connaissance, la meilleure introduction[1] à cet ensemble théorique assez complexe qui s'avère, à mon sens, aujourd'hui, le plus approprié pour fournir les écritures logico-mathématiques (*Niederschriften* également) aptes à supporter la théorie de la récursivité avancée par la psychanalyse.

Lawrence Moss, coauteur avec Jon Barwise de l'ouvrage *Vicious circles* paru en 1996, reprend ici le cœur théorique de cet ouvrage constitué par la théorie des ensembles non bien-fondés, en en déplaçant la présentation vers ce qui est apparu à la fin des années 1990 comme le cadre conceptuel le plus adéquat pour les questions traitées, à savoir la théorie des catégories (coalgébriques).

Les questions traitées par Moss sont indiquées dans le premier paragraphe de l'article : "This entry is about two kinds of circularity: *object circularity*, where an object is taken to be part of itself in some sense; and *definition circularity*, where a collection is defined in terms of itself."

Ces définitions seront à comparer aux définitions de l'imprédicativité et de la récursivité de René Lew : "Est imprédicatif un « objet » qui « parle » de lui-même. C'est assez proche, sinon parfois synonyme, de la récursivité (telle qu'une fonction se définit de se référer à elle-même en intension ou en extension : de se prendre elle-même en référence ou de prendre son objet comme référent). Je dirai que je réserverais aujourd'hui le terme d'« imprédicatif » pour un objet et celui de « récursif » pour une fonction." (*Equivocités 9bis*)

Je suivrai ici globalement la progression du texte de Moss, en limitant mon commentaire à quelques points cruciaux.

[1] On regrettera cependant la présence dans ce texte de nombreuses coquilles, introduites probablement par les transcripteurs de ce qui pourrait bien avoir été une conférence enregistrée, ce qui expliquerait le souffle porté par ce mouvement d'introduction/exposition qui le rend particulièrement indiqué pour une ouverture aux questions dont il traite. Les coquilles sont essentiellement localisées aux écritures mathématiques (donc probablement portées sur un tableau) et se rectifient, pour la majorité, par celui qui est déjà familier à ces théories.

*****

L'introduction rappelle très brièvement l'histoire de la théorie des ensembles non bien-fondés. On se reportera à Aczel [1988] et Sangiorgi ["On the Origins of Bisimulation and Coinduction"] pour plus de details sur des développements qui prennent leur origine dès les travaux de Mirimanoff (1917) destinés à trouver des parades aux paradoxes de Burali-Forti et de Russell. À la suite de la fixation des principaux systèmes axiomatiques classiques de théorie des ensembles dans les années 1920 - impliquant notamment *l'axiome de fondation* qui interdit les descentes infinies et les circularités dans la relation d'appartenance entre ensembles et qui impose une conception itérative et hiérarchique de ce qu'est un ensemble - l'option alternative, autorisant des descentes infinies, permettant de décrire des objets mathématiques présentant des circularités dans leur engendrement, cette option est restée parfaitement mineure en mathématiques jusque dans les années 1980.

Différentes versions de *l'axiome d'anti-fondation* on été proposées antérieurement (en particulier par Boffa et Forti), mais ce sont les travaux de Aczel[2] (1988, 1989) avec leurs liens applicatifs - d'abord en théorie de l'information puis en logique modale - et leurs liens théoriques avec la théorie des catégories coalgébriques, qui ont véritablement ouvert à de nombreux progrès dans les années 1990 et 2000. Dans les années 2000, les manuels de mathématiques de théorie des ensembles consacrent souvent un chapitre aux ensembles non bien-fondés.

(1) Phénomènes circulaires en théorie des ensembles

flux, arbres infinis, hyperensembles en psychanalyse

La première section est consacrée à la présentation de quelques exemples d'objets présentant des circularités dans leur définition, et ces objets mathématiques nous sont familiers par la théorie de Freud et de Lacan.

Un **flux** (*stream*) ou séquence (de pulsations) infinie, peut se penser en termes de "chaîne de pensées"[3], de chaîne signifiante, de dérivation infinie ou qui s'achève en se rompant quand par exemple le flux "se heurte à une image mnémonique encore indomptée"[4], lorsqu'un objet vient mettre un arrêt au défilement signifiant.

---

[2] Ma première rencontre avec le travail d'Aczel et l'axiome d'anti-fondation date de 2009, à l'occasion de recherches sur les paradoxes en particulier avec l'ouvrage de Barwise et Etchemendi *The liar*. Ce travail n'avait pu être poursuivi à l'époque, ni en 2011 lorsque je revenais à lui lors de recherches sur l'imprédicativité dans la logique de Girard, ne pouvant là encore que me résoudre à laisser ces questions en attente.

Ce n'est qu'après avoir pu avancer suffisamment sur ce que les logiques de Hintikka apportent de décisif à la psychanalyse que la théorie de la récursivité avancée en 2011-2012 par René Lew m'a naturellement ramené vers la théorie d'Aczel.

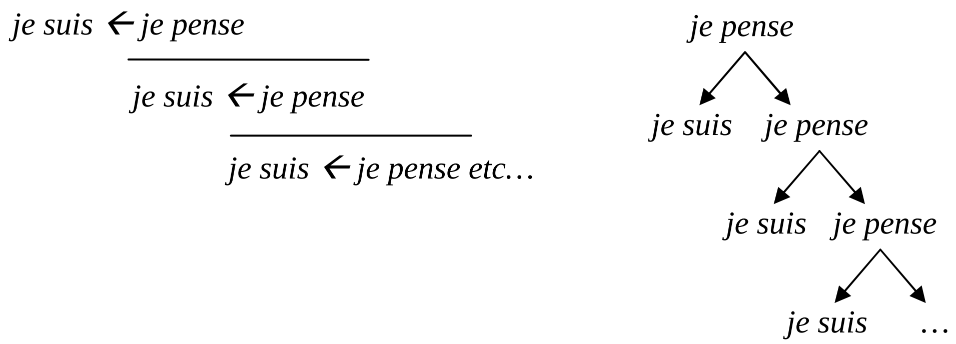
[3] cf "L'esquisse…" in *La naissance de la psychanalyse*, PUF, p. 390, traduction de *Aus den Anfängen der Psychoanalyse*, éd. S. Fisher, p. 378. Le terme original est *Denkablauf*, où Ablauf renvoie à ce qui se déroule, s'écoule.

[4] ibidem.

Dans son texte "Le séminaire sur "la lettre volée"" (1955, *in Ecrits*, p. 54-60), ainsi que dans l'addendum "Parenthèse des parenthèses" (1966) Lacan supporte sa présentation de telles séquences infinies de simples opposés binaires dont l'organisation symbolique détermine un réseau (un réel) de positions et de passages (transitions) possibles et impossibles entre ces positions.

Les flux, depuis Héraclite, donnent naissance à une conception du devenir qui ne peut advenir qu'au risque d'une pétrification susceptible d'en recouvrir l'émergence mais également organisatrice de l'écoulement à venir selon le dessin des rigidifications antérieures (*cf.* l'organisation des flux de lave d'un volcan ou d'un bassin d'écoulement hydraulique, soit l'organisation d'un littoral en littéral, selon "Lituraterre").

Ce sont de telles ramifications de flux que commencent à modéliser les **arbres infinis**. Lacan les utilise par exemple pour représenter, dans leur figuration sous forme de fraction infinie, l'engendrement d'un "je suis" à partir d'un "je pense" … "que je pense que je suis" … et ainsi de suite de manière illimitée …[5]



Un **hyper-ensemble** (*hyperset*, c'est-à-dire un ensemble susceptible de ne pas être bien-fondé) peut se figurer par un graphe, soit un ensemble de points muni d'une relation de transition permettant les passages d'un point-nœud à l'autre du graphe. Parce qu'ils peuvent ne pas être bien-fondés, soit supporter des chaînes circulaires ou infinies de transitions, les hyper-ensembles permettent de modéliser naturellement ce que les sciences de l'information appellent "systèmes de transition" ou encore "automates". Lacan mobilise ces réseaux dès "Le séminaire sur "la lettre volée"" notamment lorsqu'il évoque l'automatisme de répétition.

Lacan essayera plusieurs fois de s'appuyer sur la théorie des ensembles pour supporter la théorie du signifiant, en particulier dans ses fréquents commentaires du paradoxe de Russell (cf. les séminaires *L'identification*, *La logique du fantasme*, et tout spécialement les séances du 27 novembre et du 4 décembre 1968 du séminaire *D'un Autre à l'autre*, …).
Sur quelle axiomatique de théorie des ensembles s'appuye-t-il ? Vraisemblablement sur la théorie des ensembles classique[6], soit la théorie des ensembles selon l'axiomatique ZFC (Zermelo-Fraenkel avec axiome de choix) sans remettre en question ni commenter ses *a priori*. Et cette axiomatique implique *l'axiome de fondation* qui engage, comme nous allons le

[5] Séminaire *L'identification*, séance du 10 janvier 1962.

[6] théorie dominante à l'époque de Lacan, et vulgarisée par exemple par l'ouvrage de Paul R. Halmos *Naive Set Theory*.

voir dans une certaine conception restrictive de ce qu'est un ensemble, conception qui doit être réinterrogée par la psychanalyse[7].

Notons simplement ici que les hyper-ensembles pourraient bien être appropriés pour supporter une représentation mathématique des réseaux signifiants.

(1.1) Les flux et la récursivité propre à leur paire ordonnée

Rappelons qu'un flux s composé d'éléments a, a', … participant d'un dictionnaire A (thésaurus des objets à disposition pour exprimer ce flux) peut s'écrire :

$s = (a, a', a'', \ldots.)$

Ainsi, si les valeurs possibles des éléments dans lesquels se concrétise le flux sont A = {1, 2, 3, 4} un exemple de flux sera :

$x = (0, 1, 2, 0, 1, 2, 0, \ldots.)$

Un flux, séquence infinie par nature, se déconstruit de manière itérative sous forme de paire ordonnée composée d'une partie observable : la tête (*head*) du flux, son premier élément, et une partie ultérieure, queue (*tail*) de flux, qui est à nouveau un flux s' :

$s = \langle \mathrm{head}(s) , \mathrm{tail}(s) \rangle = \langle h , s' \rangle$

Ainsi on aura :

$x = \langle 0 , x' \rangle$ avec $x' = (1, 2, 0, 1, 2, 0 \ldots)$

Je rappelle ici une notation de la paire ordonnée en usage chez René Lew :

$(n \rightarrow (f \rightarrow o))$

où *n* vaut pour le nom d'une fonction *f* opérant intrinsèquement mais par ailleurs elle-même impossible à saisir autrement qu'à travers ce dans quoi elle échappe : ses productions *o* accessibles extensionnellement au moyen d'un objet (extension réelle), d'une image (extension imaginaire) ou d'un signifiant (extension symbolique).

Soit encore :

$$(\text{fonction en intension}_{\text{(saisie extrinsèque)}} \rightarrow (\text{fonction en intension}_{\text{(intrinsèque)}} \rightarrow \text{fonction en extension}))$$

[7] Je signale ici que la séance du 27 novembre recourt implicitement à la mobilisation d'axiomes de fondation ou d'anti-fondation en "fondement" de la théorie des ensembles. Le problème de cette séance est lié à la qualité de ses transcriptions. En particulier les passages importants sur ce sujet sont effacés dans la version officielle du Seuil, et sont retranscrits de manière contradictoire dans les autres versions que nous avons pu consulter.

Une lecture exégétique de cette leçon en prenant en compte deux hypothèses de fondation reste à faire, notamment du fait que les importants articles du mathématicien belge Boffa sur une théorie des ensembles avec axiome d'anti-fondation avaient également été publiés en 1968 et pouvaient avoir bénéficié d'un écho jusqu'à Lacan.

De même, afin de mieux faire apparaître des analogies – *a minima* formelles -, nous nous autoriserons l'écriture de la paire ordonnée d'un flux sous la forme :

(s → (tail(s) → head(s)))

soit encore :

(s → (s' → h))

À chaque étape (pulsation) de la déconstruction d'un flux dénommé s, un objet h est détaché et devient manifeste (observable, saisissable), tandis que la suite s' du flux reste latente, ne pouvant être révélée qu'itérativement par de nouvelles déconstructions élémentaires.

(s' → (s'' → h'))

(s'' → (s''' → h''))

…

Un flux se constitue donc, à tout instant scandant sa déconstruction, par une opération de détachement d'un objet qui en constitue l'échappement objectivable du moment, opération prenant appui sur le flux lui-même devant poursuivre son advenue à déconstruction lors de l'étape qui s'ensuit.

Il est à noter que ce procédé ***infini*** (*coinductif*) de déconstruction de flux opère de manière inverse[8] aux constructions (*inductives*) d'objets bien-fondés (comme par exemple les nombres ordinaux) dans lesquels chaque nouvel objet construit se compose d'objets déjà connus et donc bien-fondés car construits antérieurement au moyen d'objets antérieurement bien construits, et ainsi de suite selon une séquence ***finie*** dont le dernier élément est l'ensemble vide $\emptyset$ ou éventuellement un quelconque autre *Urelement*[9] connu).

Si la démarche de construction bien-fondée entraîne que toute nouvelle production est assurément métonymique de ce qui a antérieurement déjà été construit, la démarche de déconstruction ne s'appuye en aucune manière sur l'antécédent avec lequel elle rompt à tout instant, avec lequel elle n'entretient aucune dépendance logique, pour ne se soutenir que de l'hypothétique restant à venir.

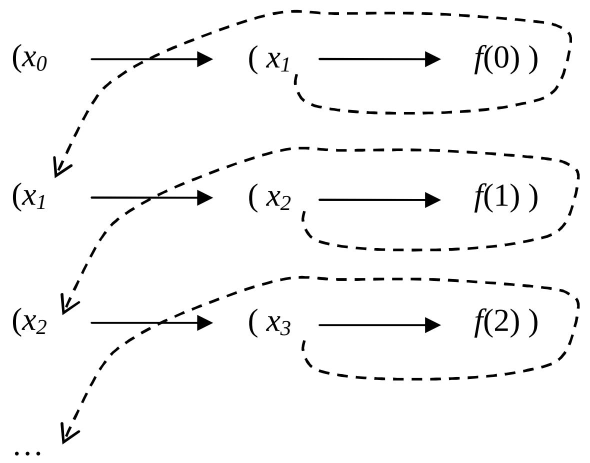
L'équation (5) de l'article de Moss montre ainsi comment un flux peut se définir par un système infini d'équations :

$x_0 \approx < f(0), x_1 >$	$(x_0 \rightarrow (x_1 \rightarrow f(0)))$
$x_1 \approx < f(1), x_2 >$	$(x_1 \rightarrow (x_2 \rightarrow f(1)))$
…	…
$x_n \approx < f(n), x_{n+1} >$	$(x_n \rightarrow (x_{n+1} \rightarrow f(n)))$
…	…

Ce mouvement se schématise à l'aide d'un zigzag auquel je donnerai la forme d'une hélice pour souligner la circularité possible (éventuellement à l'infini) du système :

[8] Il s'agit d'un véritable retournement de la démarche, nous aurons à y revenir.

[9] Sur l'usage des *Urelements* dans les théories considérées, qui peut éveiller des associations et intuitions chez le psychanalyste, *cf*. *Vicious Circles* de Barwise et Moss (1996).



Le signe ≈ (expliqué dans l'article lors du commentaire de l'équation (2)) indique une égalité formelle ou définitionnelle, sans garantie d'existence d'une solution au système d'équation. Le système d'équation est posé mais n'a pas forcément de solution : la solution éventuelle de ces équations reste hypothétique.

Et de fait, les mathématiciens démontrent[10] que, si le sujet se situe dans l'axiomatique ZFC classique de la théorie des ensembles, un tel système d'équations n'a pas de solution, car l'axiome de fondation FA *interdit* (rend *impossible*) une telle existence.

Mais si les axiomes - qui déterminent les possibilités, nécessités, impossibilités d'existences ensemblistes - ne retiennent pas FA mais au contraire l'axiome d'anti-fondation AFA, alors, *nécessairement* des solutions à de telles définitions de flux sous forme de systèmes d'équations existent.

L'axiome AFA permet d'affirmer, de poser, d'assurer, que pour chaque tel système d'équations une solution existe. Il transforme l'hypothétique solution en solution existante. Moss symbolise l'advenue à l'existence de cette solution à l'aide d'un poignard †, et la solution entre dans un système d'équations où l'égalité désormais affirmée = remplace l'égalité initialement définitionnelle et hypothétique ≈ :

$$x_0^\dagger = \langle f(0), x_1^\dagger \rangle$$
$$x_1^\dagger = \langle f(1), x_2^\dagger \rangle$$
$$\ldots$$
$$x_n^\dagger = \langle f(\mathrm{n}), x_{n+1}^\dagger \rangle$$
$$\ldots$$

Les solutions $x_n^\dagger$ ne sont pas des objets mathématiques bien-fondés car elles se fondent au moyen d'une séquence infinie d'équations et leurs valeurs complètes, si considérées une à une, restent éternellement à établir au moyen des suivantes sur lesquelles elles s'appuyent. Mais

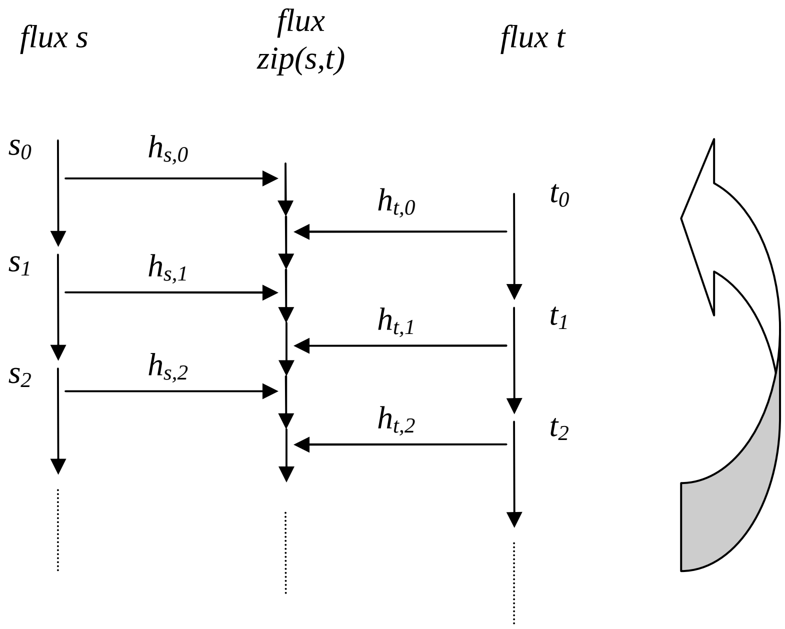
[10] ce résultat lorsque FA (l'axiome de fondation) préside aux destinées est annoncé à la fin de la section 1.3 (dernier paragraphe avant 1.3.1) et démontré en fin de 2.2.1.

cela ne les empêche pas d'exister, selon le décret AFA, ni que l'on puisse en saisir des aspects ou témoignages *f*(n) observables au temps n.

Nous avons là une expression mathématique de récursivité produisant de l'existence à partir d'un hypothétique opérant sur une paire ordonnée.

(1.1-suite) La rencontre de flux et l'échange dans le discours

Je poursuis ici un temps l'étude des flux pour interroger ce que peut produire la rencontre de deux flux. La fonction *zip* ("fermeture éclair", également appelée parfois *merge*, présentée en section 1.1 de l'article, et prise comme exemple de fonction définie par corécursion dans la section 4.5) montre comment deux flux peuvent se composer pour constituer un flux contenant les éléments de chacun des deux flux.



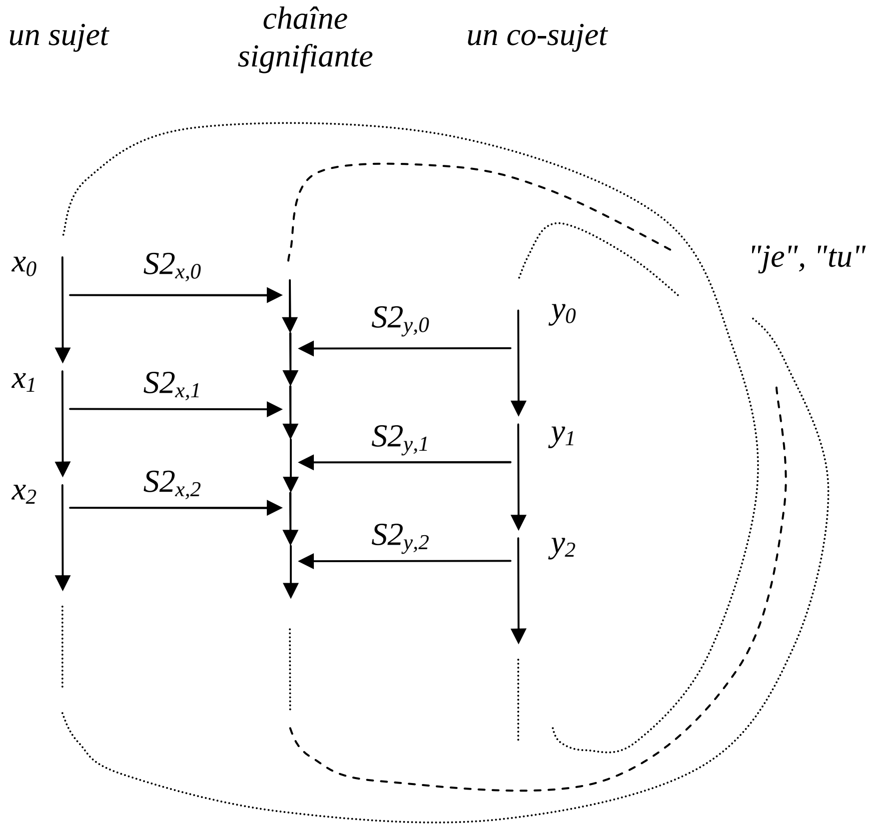
Cette fonction *zip* est une illustration de composition de deux "objets" non bien-fondés qui contribuent tour à tour à la production d'un objet commun non bien-fondé. On peut de la même manière composer des arbres infinis ou des hyper-ensembles pour construire de nouveaux objets non bien-fondés (présentant des séquences de transitions infinies ou circulaires – ce qui est indiqué dans le schéma précédent par la flèche de retour) selon des règles à définir chaque fois en fonction du type d'objet considéré.

J'admets pour hypothèse illustrative que la rencontre de deux sujets parlants dans un même discours les amène à "communiquer", soit à mettre en œuvre chacun la signifiance (la fonction signifiante) en produisant à tour de rôle des signifiants représentant chaque sujet auprès d'autres signifiants et permettant de produire signification et effets de sujets.
Les sujets parviennent à progresser dans le discours, je dirais ici pour simplifier "à se comprendre *a minima*", en mettant en jeu un certain nombre de relations signifiantes afin que s'établisse un minimum de significations communément admises par les deux et reconnues par chacun auprès de l'autre.

Un exemple prototypique d'un tel procès peut-être constitué par les échanges entre mère et enfant, selon des jeux de langage supportés par des expériences de nourrissage, de soin ou encore ludiques, dans lesquels les deux locuteurs prennent tour à tour la parole et inscrivent chacun leurs signifiants dans la chaîne signifiante commune ainsi constituée[11].

Le ressort de l'interaction ou échange entre les deux protagonistes du discours tour à tour locuteurs et allocutaires réside dans la capacité pour chacun de se saisir de la signifiance et des signifiants, significations et positions subjectives de l'autre pour les reprendre à son compte, ceci selon la littoralité (moëbiennité) propre au discours, moëbiennité marquée notamment dans le discours par les déictiques ("je", "tu", …) dont chacun peut se saisir à tour de rôle pour représenter dans la chaîne signifiante sa position énonciative propre.

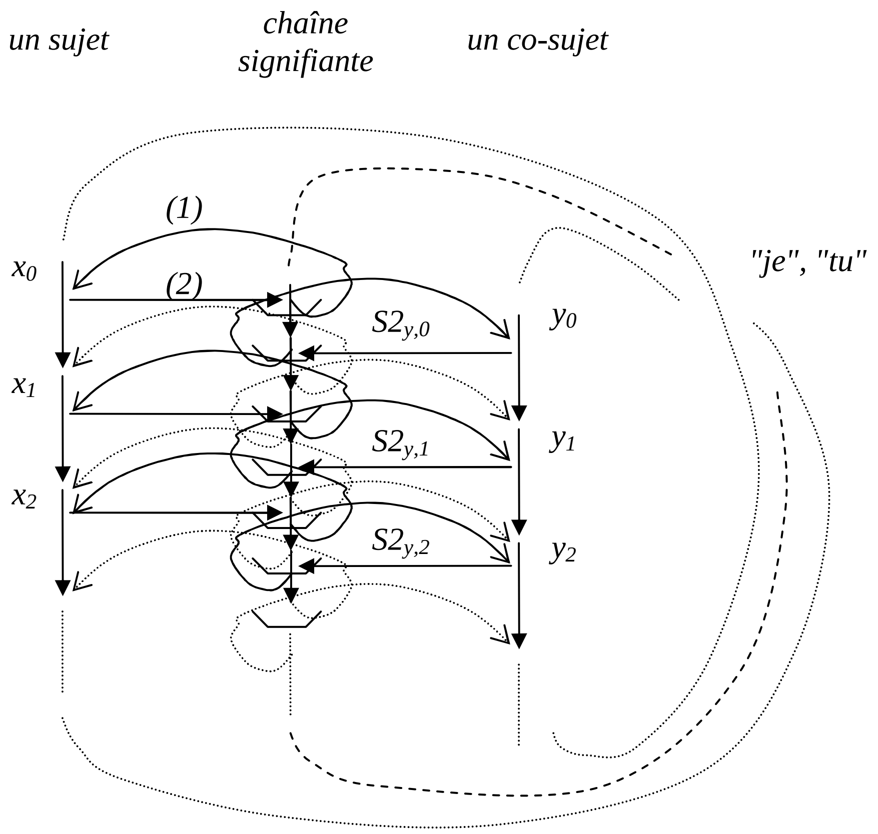
La figure suivante est extrêmement naïve et falsidique mais veut montrer comment le schéma de composition d'objets non bien-fondés peut se prêter à la figuration du procès discursif.



Bien évidemment il convient de mieux faire apparaître les phénomènes de retour de la chaîne signifiante sur la production signifiante, à commencer par l'effet engendré par la place, dans la chaîne signifiante, du vide toujours renouvelé du prochain signifiant à venir appelant sans cesse à être occupée par un signifiant ainsi amené à émerger (1), sans oublier les phénomènes de prise en considération des signifiants ($S2_{x,i}$, $S2_{y,i}$, …) venant de la chaîne signifiante (2)

[11] C'est un peu ici une lecture ancienne du texte "Le séminaire sur "la lettre volée"" et de "Parenthèse des parenthèses" – qui seraient à relire – qui sous-tend ce propos.

qui déterminent les adaptations des productions signifiantes ultérieures (comme, mais ce n'est qu'un exemple, dans les phénomènes de censure / refoulement).



(2) Fondation et anti-fondation : conception itérative des ensembles et conception coitérative

La section 2, qui introduit aux axiomes de fondation et d'anti-fondation, prend le temps d'indiquer les différences de conception fondamentales qui président à ces choix axiomatiques : *conception itérative* (ou cumulative, ou hiérarchique) et *conception coitérative* ("faute d'un meilleur nom"). Le terme conception (en anglais *conception*, mais Moss emploie aussi *picture*) est à entendre aussi bien comme le cadre conceptuel que comme la méthode d'engendrement, de procréation des ensembles, et le terme *coiterative*, de la même famille que l'anglais *coitus*, l'indique bien.

L'engendrement des ensembles bien-fondés se fait de manière itérative, cumulative[12] (et parthénogénétique ?) à partir de l'ensemble vide qui constitue le premier univers d'ensembles V_0. De lui procèdent ensuite itérativement les univers suivants obtenus selon deux moyens :

soit par application du foncteur $\wp$ (*power*, foncteur puissance qui à tout ensemble associe l'ensemble des parties de cet ensemble) qui construit, à partir d'un univers de niveau hiérarchique α, un univers de niveau hiérarchique $\alpha+1$:

[12] cette même conception est reprise dans la théorie des types de Russell et est à l'origine de la conception cumulative des métalangages (Tarski, Carnap, …).

$V_{\alpha+1} = \wp(V_\alpha)$
soit par union des univers déjà construits pour les ordinaux limites λ :
$V_\lambda = \cup_{\beta<\lambda}\ V_\beta$

La classe des ensembles bien-fondés *WF* est alors l'union de tous les univers ainsi constitués et c'est aussi la classe univers des ensembles V_{FA} sous le règne de l'axiome de bonne fondation :

$WF = \cup_\alpha\ V_\alpha = V_{FA}$

Les ensembles non bien-fondés répondent à une autre conception des ensembles :

> "According to this [*coiterative conception*], a set is an abstract structure obtained by taking a graph G (a set[13] with a relation on it), and then associating to each node *x* in the graph a set in such a way that the set associated to *x* is the set of sets associated to the children of *x* in G. This association is what we called *decoration* earlier." ("Non-wellfounded Set Theory", 2.3).

Les ensembles y sont engendrés par l'axiome d'anti-fondation qui pose que tout graphe a une unique décoration. Cet axiome permet de transformer tout graphe, tout jeu de relations sur un ensemble ordinaire, tout système d'équations définitionnel et hypothétique (cf la présentation des flux) en une existence ensembliste et solution.

Les justifications, ressorts, et conséquences de ce changement majeur de conception sont encore à commenter.

Les deux univers des ensembles
Les sections 3.4 et 4 de l'article de Moss ont trait notamment à l'opérateur $\wp$. Ce foncteur joue un rôle capital dans les distinctions entre ensembles d'ensembles et classes d'ensembles

Dans la catégorie des ensembles, $\wp$ n'a pas de point fixe (pas de solution à l'équation X = $\wp$(X)) (il n'y a pas d'ensemble de tous les ensembles).

Dans la catégorie des classes, pour celui qui vit sous le régime de la bonne fondation (FA), $\wp$ a un seul point fixe (à la fois plus petit point fixe $\wp_*$ et plus grand point fixe $\wp^*$) : c'est l'univers des ensembles V_{FA} qui est égal à la classe propre (qui n'est pas un ensemble) des ensembles bien-fondés (*well-founded*) *WF* :

FA : $\wp_* = WF = \wp^* = V_{FA}$

Mais celui qui vit sous le régime où la possibilité de non bonne fondation est affirmée (AFA) peut voir son univers s'agrandir à tout instant de manière surprenante, car au-delà du plus petit point fixe $\wp_*$ toujours constitué par la classe propre (collection) des ensembles bien-fondés, il y a bien d'autres ensembles, les ensembles non bien-fondés, avec lesquels peut se colliger

[13] S'agit-il ici, quand on parle de l'ensemble support du graphe, d'un ensemble encore potentiellement non-bien-fondé, ou simplement d'un ensemble ordinairement bien-fondé ? La formulation de cette définition, très fortement imprédicative comme on peut s'y attendre pour définir des objets qui admettent des définitions circulaires, exige sûrement pour être mieux comprise de se reporter au texte fondateur d'Aczel et aux exemples fournis par Moss. La définition citée ici risque de présenter des ambiguités liées à des termes choisis avec insuffisamment de précaution.

l'univers des ensembles susceptibles de ne pas être bien-fondés V_{AFA} , qui est le plus grand point fixe $\wp^*$ du foncteur $\wp$:

AFA : $\wp_* = WF$ et $\wp^* = V_{AFA}$

La distinction de ces deux univers V_{FA} et V_{AFA} est *fondamentale* car elle permet de distinguer deux classes dans lesquelles les quantificateurs pourront avoir des domaines de quantification (*ranges*) différents. Ainsi, en notant $\exists_{FA}$ et $\forall_{FA}$ les quantificateurs existentiels et universels dans l'univers des ensembles biens fondés, et $\exists_{AFA}$ et $\forall_{AFA}$ ces quantificateurs dans l'univers des ensembles non nécessairement bien fondés :

$\exists_{AFA}\, x\, \neg WF(x)$
il existe un x non bien-fondé

$\neg\exists_{FA}\, x\, \neg WF(x)$
il n'existe pas un x qui soit non bien-fondé

non bonne fondation

bonne fondation

$\forall_{FA}\, x\, WF(x)$
tout x est bien-fondé

$\neg\forall_{AFA}\, x\, WF(x)$
ce n'est pas tout x qui est bien-fondé

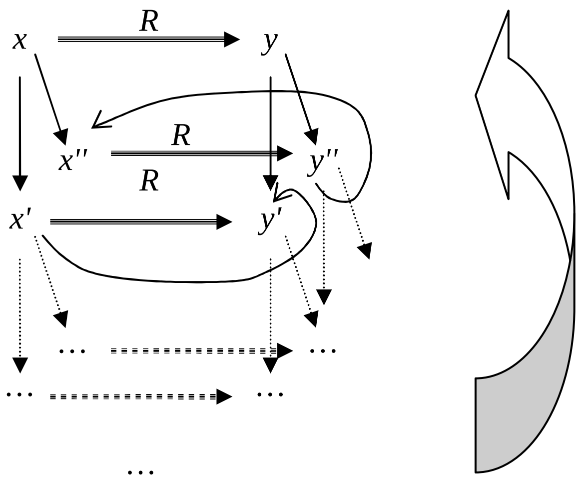
La transition d'une quantification dans l'univers non bien-fondé AFA à une quantification dans l'univers bien fondé FA entraîne la forclusion de chacun des ensembles non bien-fondés, ou plutôt la forclusion de la constitution non bien-fondée de chacun de ces ensembles afin de les rendre bien-fondés (le procédé est d'amputation, effacement, saturation, *flattening*, immersion …).
La transition inverse, saut discordanciel, réintroduit la non bonne-fondation dans ce qui était jusque-là bien fondé, en refaisant apparaître et jouer de la relation de dépendance (Hintikka) non bien-fondée.

(3.1) Utilisation de AFA : la relation de bisimulation

Le concept de bisimulation est fondamental dans la théorie des coalgèbres. Une relation R définie pour un graphe G (ou plus généralement pour une coalgèbre S) se définit par le fait que tout couple (x, y) appartenant à cette relation (donc $x\ R\ y$) satisfait les deux conditions suivantes :

1) à toute transition de x vers une position x' correspond une transition de y vers une position y' telle que x' et y' sont eux-mêmes liés par la relation R.
2) et dans le sens inverse, à toute transition de y vers une position y'' correspond une transition de x vers une position x'' telle que x'' et y'' sont eux-mêmes liés par la relation R.

La relation de bisimulation dans une F-coalgèbre (ou entre deux F-coalgèbres) préserve et réfléchit les transitions, elle est elle-même une F-coalgèbre, qui est de plus une relation d'équivalence et donc permet d'effectuer des coupures (quotientisations), coupures qui pourraient être du même ordre – mais il faudrait s'en assurer d'un point de vue mathématique - que des coupures de bandes de Moebius si l'on considère des systèmes de transitions présentant des circularités.



L'existence d'une relation de bisimulation entre deux positions permet d'établir une similarité de comportement observable, soit non pas l'identité des positions, mais leur impossible différentiation d'après les observables des chaînes de transitions partant d'elles.

Peut-être le rire qui chez l'allocutaire succède au mot d'esprit du locuteur manifeste-t-il l'établissement d'une telle similitude, du moins si le mot d'esprit est entendu par le locuteur lui-même qui peut parfois ne saisir l'esprit de son mot et n'en rire qu'à la suite du rire qu'il aura entendu. Ce serait là modélisation de l'établissement d'un rapport signifiant réussi entre deux parlêtres.

(4.5) Comment concevoir la coalgèbre finale d'un foncteur ?

Moss indique : "The final coalgebra of a functor may be regarded as a space of *complete observations*", en précisant que la notion de "d'observation complete" est bien sûr purement suggestive[14].

Il est trop tôt pour s'engager bien avant dans ce que cette conception peut évoquer pour la psychanalyse, mais notons sans différer qu'une fonction "d'observation complète" existe en psychanalyse : elle participe des fonctions que Freud attribue à la conscience morale et plus tard au surmoi ou sur-je (*Überich)*, et qu'avant la psychanalyse, cette fonction était dévolue à l'Autre divin et omniscient.

(x) définitions inductives et définitions coinductives

---

[14] C'est une figuration proche de celle de Rutten [2000, p. 42] : "A final system [= coalgebra] can be considered as a universal domain of canonical representatives for bisimulation equivalences classes", ceci du fait que deux éléments d'une coalgèbre S sont bisimilaires si et seulement si leurs images par l'unique homomorphisme f_S de la coalgèbre S dans la coalgèbre finale P, sont égales :

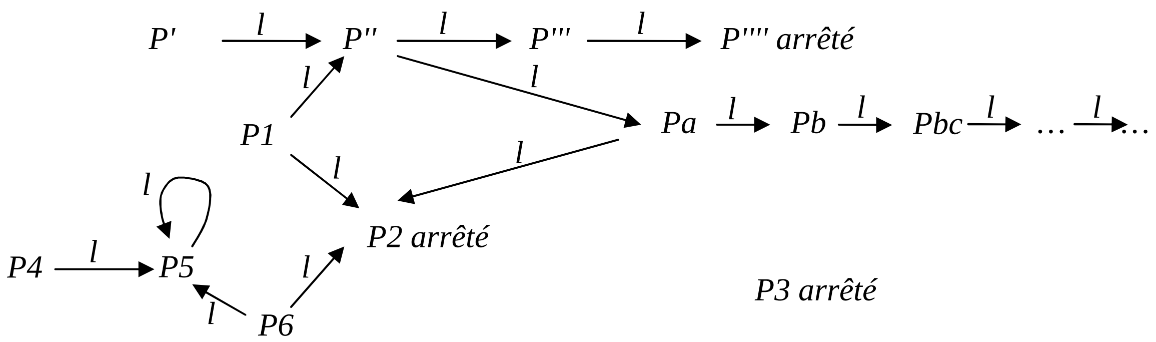
$$s \sim_S s' \qquad \Leftrightarrow \qquad f_S(s) = f_S(s')$$

Et Rutten ajoute : "The element $f_S(s)$ in the final system can be viewed as the 'obervable behaviour' of *s*".
Voir aussi la discussion sur l'existences des coalgèbres finales (pages 43-47) et la présentation de très importants procédés des construction des coalgèbres finales.

Le passage du monde algébrique au monde coalgébrique correspond à une quasi dualité, soit un retournement des morphismes et dynamiques (relations de transitions). Ce véritable saut ou revirement se retrouve lorsque l'on passe de définitions inductives à des définitions coinductives, on y procède là encore à un retournement, celui du sens dans lequel on suit les règles de dérivation.

J'adapte légèrement ici l'exemple de Sangiorgi [2012, pages 30-34], en considérant un système de transitions avec écritures (*LTS*, *labelled transition system*) constitué d'un graphe G correspondant aux positions P pouvant être prises par un sujet dans la structure, et d'une relation $\rightarrow$ de transition ou passage d'une position P à une position P', chaque passage s'accompagnant d'une écriture que, pour simplifier ici, je considère unique et représente par la lettre *l*.

Certaines positions sont des positions d'arrêt : on ne peut procéder à aucune transition depuis elles (et donc à aucune écriture).



Exemple de système de transitions avec écritures

Les prédicats suivants vont servir à illustrer la distinction entre définitions inductives et coinductives.
Soit $\downarrow$P le prédicat qui affirme de P qu'il a une trace (séquence de transitions conduisant à une production d'écritures *l*) finie, c'est-à-dire que depuis la position P il existe une séquence de dérivations conduisant à une position arrêtée.
La définition inductive de ce prédicat $\downarrow$ s'écrit, à l'aide d'un système d'axiomes et de règles de dérivation[15], par :

$$\frac{P \text{ arrêté}}{\downarrow P} \qquad\qquad \frac{P \xrightarrow{l} P' \qquad \downarrow P'}{\downarrow P}$$

axiome — règle d'inférence R1

La détermination de l'ensemble des positions P qui ont une trace finie s'effectue alors selon un mouvement de clôture progrédiente selon les règles (*closure forward under the rules*) : cet

[15] Pour axiome et règles de dérivation (ou lois de déduction) cf. "le compte-rendu du séminaire 1966-67 La logique du fantasme", in Autres écrits, p. 326.

ensemble est en effet construit par addition successive de nouvelles positions : initialisant la démarche avec l'ensemble vide, le premier temps de la construction est d'ajouter à cet ensemble vide toutes les positions qui satisfont l'axiome (toutes les positions arrêtées), et le temps suivant effectue la clôture progrédiente (des prémisses à la conclusion) de cet ensemble selon la règle d'inférence. Partant de l'ensemble vide, l'ensemble $\downarrow$ est ainsi le plus petit ensemble clos selon la règle R1 suivie de manière progrédiente.

Cette approche est radicalement renversée dans une définition coinductive.

Soit $\uparrow$P le prédicat qui affirme de P qu'il a une trace infinie, c'est-à-dire que depuis une position P il existe une séquence infinie de transitions ne conduisant donc jamais à une position arrêtée.

La définition coinductive de ce prédicat $\uparrow$ s'écrit avec la seule règle de dérivation :

$$\frac{P \xrightarrow{l} P' \qquad \uparrow P'}{\uparrow P}$$

règle d'inférence R2

On peut alors par exemple construire l'ensemble des positions qui satisfont le prédicat $\uparrow$ "avoir une trace infinie" en procédant par élimination à partir d'une hypothèse initiale que toutes les positions du système satisfont le prédicat. Sont alors retirées de cet ensemble, une à une, les positions qui ne sont pas à l'origine d'une nouvelle transition (positions arrêtées) ou dont toutes les transitions partant de cette origine conduisent à une position déjà retirée de l'ensemble des candidats encore admissibles à être prédicables de $\uparrow$. Ce processus itératif peut être infini mais converge alors à l'infini vers l'ensemble $\uparrow$ limite de l'itération infinie. $\uparrow$ est le plus grand ensemble de positions clos selon la règle R2 suivie de manière rétrogrédiente (*closed backward under the rule R2*) (les règles d'inférences sont parcourues depuis les conclusions prises comme hypothèses jusqu'aux prémisses).

J'ai assez longuement illustré ce procédé de définition coinductif formalisé mathématiquement seulement assez récemment (quand bien même il aura pu être utilisé auparavant) parce qu'il ne semble pas très connu des psychanalystes. Pourtant il pourrait trouver quelques échos avec la théorie de la psychanalyse et je l'indique ici succinctement par deux remarques, outre le renvoi déjà fait au "compte-rendu du séminaire 1966-67 La logique du fantasme".

La première invite à une reconsidération du carré modal de l'écriture présenté par Lacan, à lire par exemple dans la séance du séminaire *Les non-dupes errent* du 19 février 1974, et qui, à l'aide des prédicats précédemment définis, pourrait se réécrire ainsi :

$\uparrow$P
ce qui ne cesse pas de s'écrire

P arrêté
ce qui ne cesse pas de ne pas s'écrire

coinduction induction

$\downarrow$P

$P\ {}_{?}\!\xrightarrow{l}_{new} P')$

ce qui cesse de s'écrire

ce qui cesse de ne pas s'écrire

La seconde constate que la définition du signifiant, à savoir ce qui "représente un sujet auprès d'un autre signifiant", est une définition de *forme coinductive*[16] [17].

(4.2) (4.3) Algèbres et coalgèbres[18]

Cette section introduit à des aspects théoriques un peu plus avancés mais qu'il est nécessaire de présenter sans différer, pour ne pas amputer la richesse de cet article dans ce qu'il peut avoir d'évocateur pour la psychanalyse.

Moss rappelle dans les sections 4.2 et 4.3 de son article quelques fondamentaux sur les algèbres et coalgèbres. Ainsi pour un foncteur F (par exemple F(X) = X+A), une algèbre (X, α) sur ce foncteur F est constituée d'un objet (un ensemble éventuellement muni d'une structure additionnelle – topologique, métrique, …) X associé à une dynamique (une fonction) α :

$\alpha : F(X) \to X$ ex : $\alpha : X+A \to X$

Dans une F-coalgèbre (X, γ), le sens de la flèche est renversé :

$\gamma : X \to F(X)$ ex : $\gamma : X \to X+A$

Pour un foncteur F donné, les collections des F-algèbres et des morphismes entre ces algèbres constituent une catégorie qui peut avoir un *objet initial*, l'algèbre initiale (I, ι). Cette algèbre initiale a la propriété que pour toute autre algèbre (X, α) de la catégorie, il existe un unique homomorphisme de l'algèbre initiale vers cette algèbre : $[[\alpha]]: (I, \iota) \to (X, \alpha)$

[16] Pour accepter de s'en laisser *a minima* convaincre, il suffit de remplacer dans la définition R2 le prédicat "$\uparrow$P " par " P est un signifiant " et la relation $P \to P'$ par " P représente un sujet auprès de P' ".
[17] Bien évidemment la circularité de la définition du signifiant ne s'arrête pas au fait que le *definiendum* apparaît dans le *definiens* (ce que, comme il a été montré, les définitions coinductives supportent encore mieux que les définitions inductives, car elles ne nécessitent pas l'étape de base à partir du vide et de l'axiome initial), mais doit prendre en compte le fait que le sujet lui-même se détermine circulairement à l'aide du signifiant, en tant qu'effet métaphorique de la pure relation signifiante.

[18] cf. ma réponse au texte "*Das Ding*, le mode réel de l'objet" de René Lew : "Schématisme (co)algébrique pour une théorie de la (dé)construction" du 12 septembre 2012, dont on trouvera ici des éléments de mise à jour.

L'existence d'une algèbre initiale permet de définir les fonctions [[α]] de manière récursive, et les ensembles selon un procédé inductif.

ex: F(X) = X+A F-algèbre initiale (I, ι) F-algèbre (X, α)

$$\begin{tikzcd} I+A \arrow[r, "F([[\alpha]])"] \arrow[d, "\iota"'] & X+A \arrow[d, "\alpha"'] \\ I \arrow[r, "[[\alpha]]"] & X \end{tikzcd}$$

De manière duale, pour un foncteur F donné, les collections des F-coalgèbres et des morphismes entre ces coalgèbres constituent une catégorie qui peut avoir un *objet terminal* (aussi appelé *final*) : la coalgèbre terminale (T, τ).
La coalgèbre terminale a la propriété que pour toute autre coalgèbre (X, γ) de la catégorie des F-coalgèbres, il existe un unique homomorphisme de cette coalgèbre vers la coalgèbre terminale : [[γ]]: (X, γ) → (T, τ)

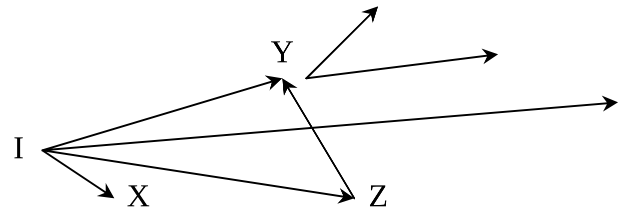
Il est à noter que tous les foncteurs n'ont pas une coalgèbre terminale. C'est un point important qui exige par exemple l'extension des ensembles bien fondés aux *ensembles pouvant ne pas être bien fondés* afin que le foncteur $\wp$ ait une coalgèbre finale.

L'existence d'une coalgèbre terminale permet de définir les fonctions [[γ]] de manière corécursive et les ensembles selon un procédé coinductif.

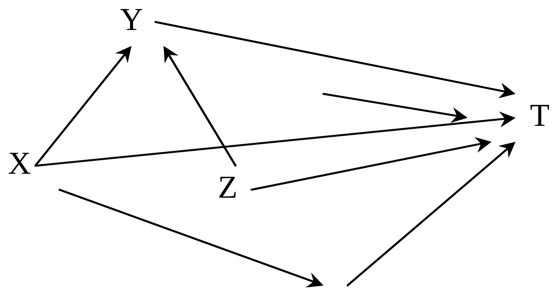
ex: F(X) = X+A F-coalgèbre (X, γ) F-coalgèbre terminale (T, τ)

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "[[\gamma]]"] \arrow[d, "\gamma"'] & T \arrow[d, "\tau"'] \\ X+A \arrow[r, "F([[\gamma]])"] & T+A \end{tikzcd}$$

Objet initial et terminal peuvent être considérés comme des centres d'où divergent les morphismes vers les autres objets (centrifuge) ou vers lesquels convergent les morphismes (centripète), comme figuré par les exemples ci-après.

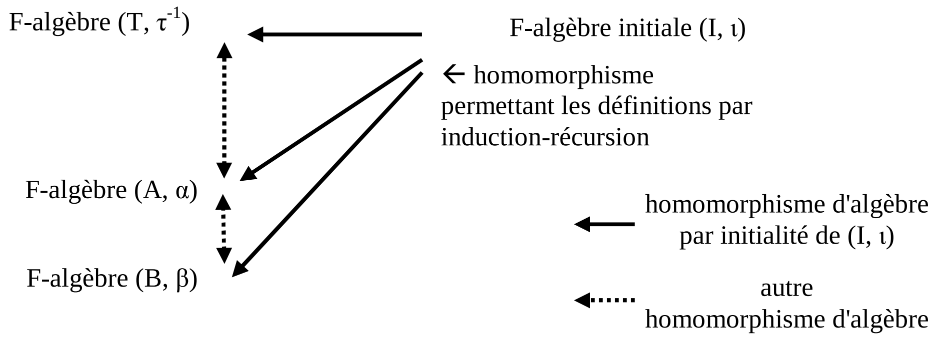


exemple d'ensemble de morphismes liant les objets d'une
catégorie possédant un objet initial I



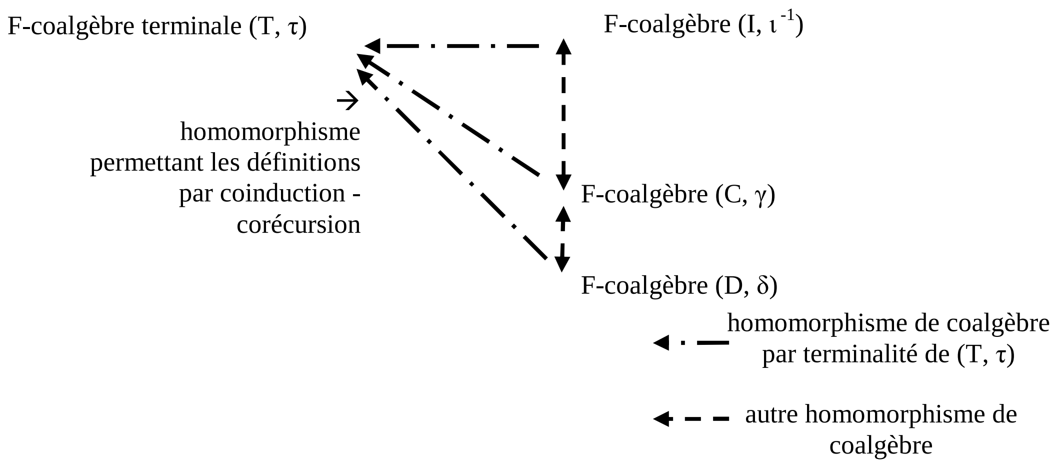
exemple d'ensemble de morphismes liant les objets d'une
catégorie possédant un objet terminal T

Voici quelques schémas montrant les fonctions préservatrices de structure (homomorphismes) opérant entre algèbres d'une part, et coalgèbres de l'autre. Les agencements dans ces figures recherchent la ressemblance avec des schématismes du carré des modalités aléthiques de Jacques Lacan (séminaire *Le savoir du psychanalyste*, séance du 1er juin 1972) ou du carré modal de René Lew.



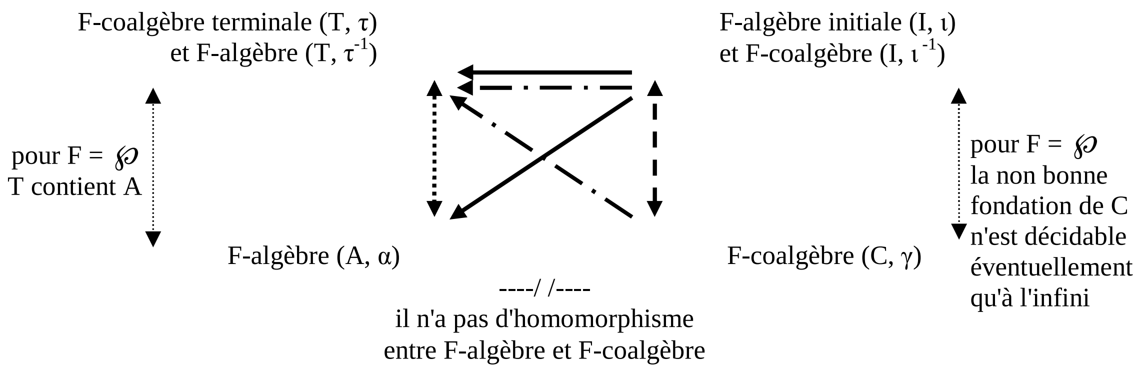
homomorphismes de F-algèbre dans
la catégorie des F-algèbres

L'algèbre initiale et la coalgèbre finale sont chacune uniques à isomorphisme près. Leurs dynamiques sont des bijections dont l'identité (le non changement) constitue le paradigme. Ainsi, si *(I, ι)* est une F-algèbre initiale, la dynamique *ι* est une bijection dont l'inverse ι^{-1}, associée au même ensemble support *I*, donne une coalgèbre pour le même foncteur F : (I, ι^{-1}), et de même une F-coalgèbre terminale (T, τ) *ne va pas sans* une F-algèbre (T, τ^{-1}).



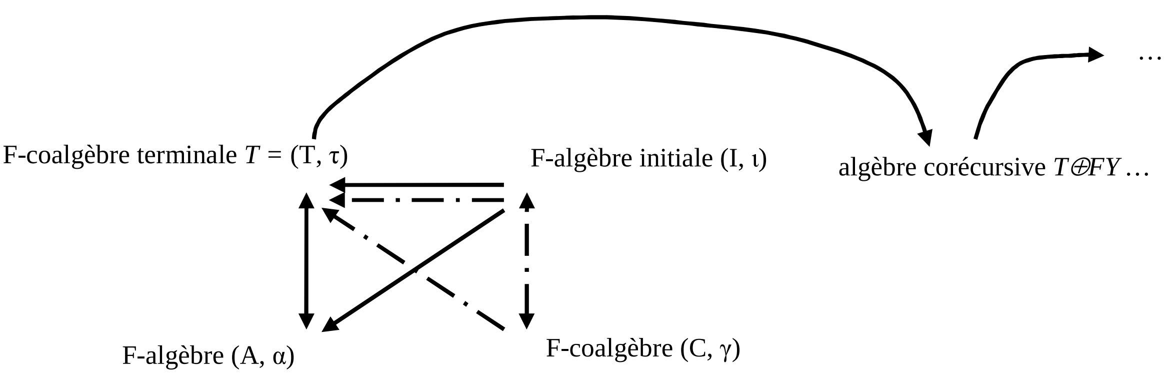
homomorphismes de F-coalgèbre
dans la catégorie des coalgèbres

Algèbres et coalgèbres font partie de catégories distinctes. Les homomorphismes sont intra-catégoriels. Il n'y a pas d'homomorphisme entre une algèbre et une coalgèbre.



homomorphismes d'algèbre et de coalgèbre

Je signale enfin ici – c'est une avancée parmi d'autres de ces théories très fécondes, non évoquée dans le texte de Moss – la possibilité de faire jouer de manière (co)récursive les algèbres avec les coalgèbres, selon des itérations dont le principe veut être rendu par le schéma suivant :



théorie des algèbres itératives (coalgèbres
récursives, algèbres corécursives, …)

(4.5) comparaison conceptuelle

Il conviendra de revenir sur le tableau des dualités (section 4.5, reproduit traduit ci-dessous) qui synthétise les oppositions, retournements et bascules qui jouent entre les concepts étudiés dans cet article.

algèbre pour un foncteur	coalgèbre pour un foncteur
algèbre initiale	coalgèbre finale
plus petit point fixe	plus grand point fixe
relation de congruence	relation de bisimulation
logique équationnelle	logique modale
récursion : function ayant pour domaine une algèbra initiale	corécursion: function ayant pour codomaine une coalgèbre finale
axiome de fondation	axiome d'anti-fondation
conception itérative	conception coitérative
ensemble avec opérations	ensemble avec transitions et observations
utile en syntaxe	utile en sémantique
bottom-up	top-down

La colonne de gauche concerne les mouvements constructifs (synthèse), et s'y oppose ce qui relève d'une dynamique de la déconstruction (analyse).

Il pourrait certainement être étendu à des couples conceptuels de la psychanalyse : prédicativité – imprédicativité, non récursivité – récursivité, proposition – modalité, énoncé – énonciation, voire encore politique de l'effacement – politique de la concertation, éthique du bien (fondé) – éthique du sujet, soit, pt'êtbien, de la récursivité …

Je précise que pour ma lecture des textes de René Lew de la série *Equivocités*, je m'appuie sur les équivalences suivantes (à discuter sûrement) :

objet prédicatif ~ ensemble bien-fondé
objet imprédicatif ~ ensemble non bien-fondé
mouvement de construction ~ dynamique algèbrique
mouvement de déconstruction ~ dynamique coalgèbrique

Et la récursivité (au sens de René Lew) ferait jouer des fonctions coinductives, corécursives[19].

*****

[19] il existe des flottements selon les auteurs dans l'usage et les définitions des termes coinduction (qualifiant généralement une méthode de définition d'un ensemble ou une méthode de démonstration) et corécursion (qualifiant habituellement une méthode de définition d'une fonction d'une coalgèbre dans une coalgèbre finale).

Conclusion

Ce texte vise d'abord à amorcer une réflexion pour une éventuelle prise en considération des théories étudiées – ensembles éventuellement non bien-fondés, (co)algèbres, … - pour le cas où la psychanalyse y reconnaîtrait des concepts, schématismes, approches semblables à celles qu'elle élabore ou dont elle a besoin dans son champ, auquel cas elle pourrait trouver dans ces théories des concepts et écritures lui permettant de mieux se saisir du réel qui détermine ce champ.

Les théories évoquées, récentes, ont trouvé leurs premières mobilisations pour traiter de questions philosophiques avec les travaux de Barwise et Etchemendy (*The Liar*, 1988) sur les paradoxes, et l'ouvrage de Barwise et Moss (*Vicious circles*, 1996) qui montre d'autres utilisations en logique modale, autour des paradoxes sémantiques, en logique des déictiques, et en théorie des jeux, donc pour aborder un éventail de questions et problèmes au travail dans la philosophie analytique, mais qui concernent également la psychanalyse.

J'insiste une dernière fois ici sur le cœur du mouvement en jeu : la com-mutation du mode algébrique au mode coalgébrique, de l'inductif au coinductif, du bien-fondé au non bien-fondé (et la mutation inverse), relève d'un saut (discordanciel dans un sens, d'un effacement forclusif dans l'autre), entraînant un renversement de la temporalité et de la quantification, du parcours des règles de dérivation et des modalités. Il trouve aussi bien des échos dans la philosophie continentale du XIX$^{\text{ième}}$ et XX$^{\text{ième}}$ siècle (Kierkegaard et Heidegger) que dans des phénomènes linguistiques des plus fondamentaux, si l'on considère que ces modes peuvent également rendre compte de la distinction entre voix passive-active et voix moyenne dans les langues indo-européennes[20].

Et les deux modes pourraient bien agir de concert, à l'occasion, pour que n'opère point de manière par trop in-cor-recte la pulsation de la fonction qui préside à nos incessantes constructions/déconstructions.

*****

[20] cf Emile Benveniste, "Actif et moyen dans le verbe", in *Problèmes de linguistique générale 1*, page 173.

Bibliographie

Voici un échantillon de points d'entrée dans la théorie des ensembles non bien-fondés et dans la théorie des catégories coalgébriques.

Peter Aczel, “Non-Well-Founded Sets”, 1988, CSLI Publications.
http://standish.stanford.edu/bin/detail?fileID=1817023219

Jon Barwise and Lawrence Moss, *Vicious Circles*, 1996, CLSI Publications.

Gérard Ferrand, *(Co)induction*, 2007
http://www.univ-orleans.fr/lifo/Members/ferrand/coinduc.pdf

Bart Jacobs, Jan Rutten, "A tutorial on (Co)Algebras and (Co)Induction", 1997
http://www.cs.ru.nl/~bart/PAPERS/JR.pdf

Lawrence S. Moss, "Non-wellfounded Set Theory", 2008, Stanford Encyclopedia of Philosophy.
http://plato.stanford.edu/entries/nonwellfounded-set-theory/

J.J.M.M Rutten, "Universal coalgebra: a theory of systems", Theoretical Computer Science 249 (2000) 3–80
http://agp.hx0.ru/arts/10.1.1.159.2020.pdf

Davide Sangiorgi, "On the Origins of Bisimulation and Coinduction"
http://www.cs.unibo.it/~sangio/DOC_public/history_bis_coind.pdf

Davide Sangiorgi, *Introduction to bisimulation and coinduction*, 2012, Cambride University Press.